Мягкие вычисления

- *So far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain. And so far as the are certain, they do not refer to reality.*

Albert Einstein

Мягкие вычисления

- Нечёткая логика
- Нейровычисления
- Генетические вычисления
- Вероятностные вычисления

- Рассуждения на базе свидетельств
- Сети доверия
- Хаотические системы
- Разделы теории машинного обучения

Мягкие вычисления

+ Нечёткая логика обеспечивает:
    - работу с неточностью
    - гранулирование информации
    - приближённые рассуждения
    - вычисления со словами
+ Нейровычисления
+ Генетические вычисления
+ Вероятностные вычисления

Мягкие вычисления

+ Нечёткая логика
+ Нейровычисления

  способность к:
  - обучению,
  - адаптации,
  - распознаванию.
+ Генетические вычисления
+ Вероятностные вычисления

Мягкие вычисления

+ Нечёткая логика
+ Нейровычисления
+ Генетические вычисления:
  - систематизация случайного поиска
  - достижение оптимальных характеристик
+ Вероятностные вычисления

Мягкие вычисления

- Нечёткая логика
- Нейровычисления
- Генетические вычисления
- Вероятностные вычисления:
  - управление неопределённостью,
  - проведение рассуждений, исходящих из свидетельств

Мягкие вычисления

- \+ Нечёткая логика
- \+ Нейровычисления
- \+ Генетические вычисления
- \+ Вероятностные вычисления

=

Гибридные вычисления

Гранулирование информации

- Человеческие понятия возникают в результате группировки точек или объектов, объединяемых по сходству.
- Нечёткость сходства приводит к тому, что эти группы являются нечёткими.
- В естественном языке слова играют роль меток гранул (для сжатия данных).
- В нечёткой логике гранулирование информации лежит в основе понятий *лингвистической переменной* и *нечётких правил* вида «если … то …» (if..else..).

Вычисления со словами

Предположим, что ящик содержит десять шаров разного размера, из которых *несколько больших*, и *немного малых*.
Какова вероятность того, что случайно вытянутый шар не является *ни большим*, *ни малым*?

Вычисления со словами

- <u>Объектами</u> вычислений являются <u>слова</u>, выступающие в роли меток гранул.
- <u>Исходными данными </u>является <u>набор предложений</u> на естественном языке.
- Желаемые заключения также выражаются в терминах естественного языка

«Маша молодая, а Саша на несколько лет старше, чем Маша»

Саша is (молодая+несколько) лет

«Большинство студентов – молодые, и большинство молодых студентов холосты»

(большинство² студентов холосты)

Вычисления со словами

- Объектами вычислений являются слова, выступающие в роли меток гранул
- Исходными данными является набор предложений на естественном языке
- Желаемые заключения также выражаются в терминах естественного языка

«Маша молодая, а Саша на несколько лет старше, чем Маша»
Саша is (молодая+несколько) лет

«Большинство студентов – молодые, и большинство молодых студентов холосты»
(большинство^2 студентов холосты)

Вычисления со словами

- Слова играют роль *нечётких ограничений*, всё предложение интерпретируется как нечёткое ограничение на переменную

  «Маша молода»:

  Маша is молода = Возраст(Маши) is молодой

  = -- *операция разъяснения*

  Возраст(Маши) – ограничиваемая переменная

  молодой – нечёткое ограничение

Вычисления со словами

Если *p* – предложение естественного языка, то разъяснение *p* называют *канонической формой*.

В общем виде каноническая форма представляется в виде

X isr R

X – лингвистически ограничиваемая переменная
R – ограничивающее нечёткое отношение
r – дискретная переменная, определяющая роль R по отношению к X (например: является, часто, обычно,…)

Вычисления со словами

Этапы вычислений со словами:

1. Разъяснение (предложения в канонической форме).
2. Распространение ограничений (применение правил вывода).
3. Ретрансляция (выведенных ограничений в предложения ЕЯ).

Нечёткие отношения

Нечёткие отношения

Пусть (Г,C(Г),π) – возможностное пространство.
Пусть X, Y – множества.

Возможностное (нечёткое) бинарное отношение -- отображение R: Г$\rightarrow$X$\times$Y (нечёткое подмножество на плоскости).

Функцией принадлежности отношения R называют функцию, определённую следующим образом:

$$\mu_R(x,y)=\pi\{\gamma\in\Gamma\,|\,R(\gamma)=(x,y)\},\ (x,y)\in X\times Y$$

Операции над нечёткими отношениями

Пересечение нечётких отношений:

$$\mu_{R\cap S}(x,y)=\mu_R(x,y)\circ^T\mu_S(x,y)$$

Т-норма минимум (T(a,b)=min{a,b}):

$$\mu_{R\cap S}(x,y)=\min(\mu_R(x,y),\mu_S(x,y))$$

Т-норма произведение (T(a,b)=a*b):

$$\mu_{R\cap S}(x,y)=\mu_R(x,y)\cdot\mu_S(x,y)$$

Операции над нечёткими отношениями

Пересечение нечётких отношений:

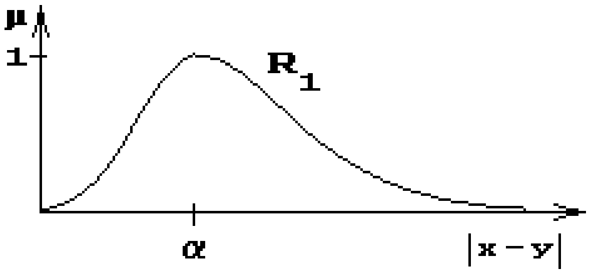
<u>Пример</u>

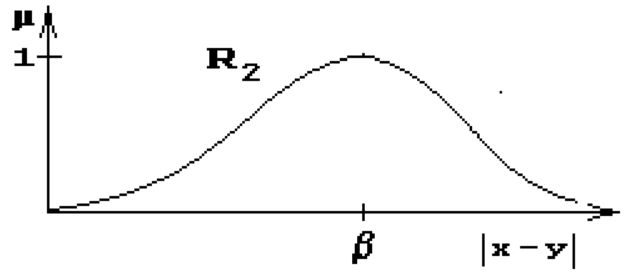
t-норма: минимум

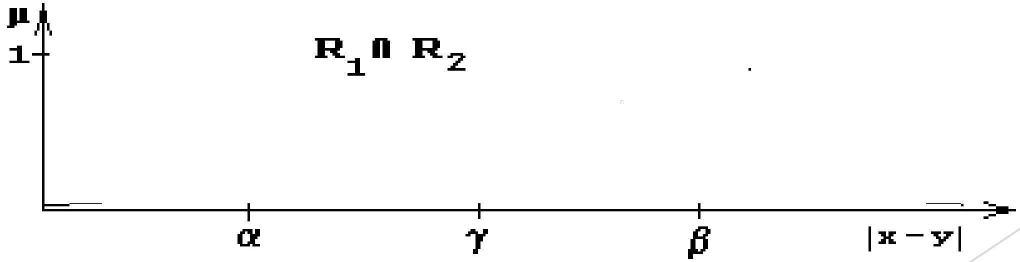
x$\mathbf{R_1}$y – «модуль разности |x-y| близок к α»,

x$\mathbf{R_2}$y – «модуль разности |x-y| близок к β»,

x($\mathbf{R_1 \cap R_2}$) y – «модуль разности |x-y| близок к α и β».







Операции над нечёткими отношениями

Объединение (суммирование) нечётких отношений:

$$\mu_{R\cup S}(x,y)=\mu_R(x,y)\circ^S\mu_S(x,y)$$

S-норма максимум (S(a,b)=max{a,b}):

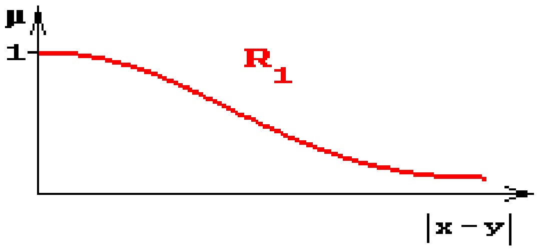
$$\mu_{R\cup S}(x,y)=\max(\mu_R(x,y),\mu_S(x,y))$$

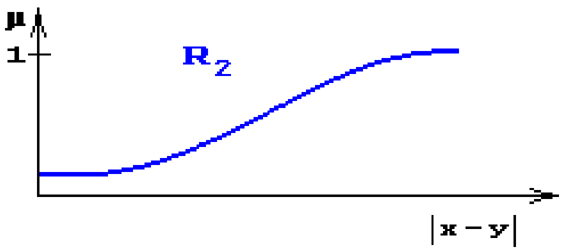
Операции над нечёткими отношениями

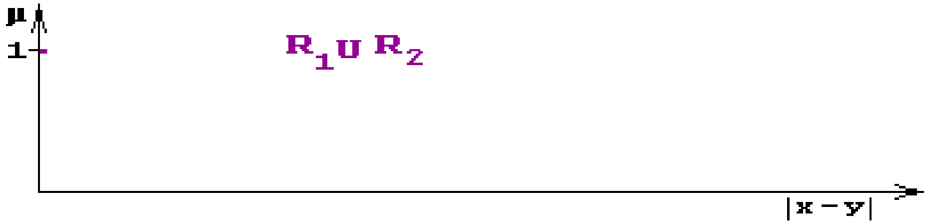
Объединение (суммирование) нечётких отношений:

<u>Пример</u>

$x\mathbf{R_1}y$ - «действительные числа x и y очень близкие»,
$x\mathbf{R_2}y$ - «числа x и y очень различны»,
$x(\mathbf{R_1 \cup R_2})y$ - "числа x и y очень близкие или очень различные".







Операции над нечёткими отношениями

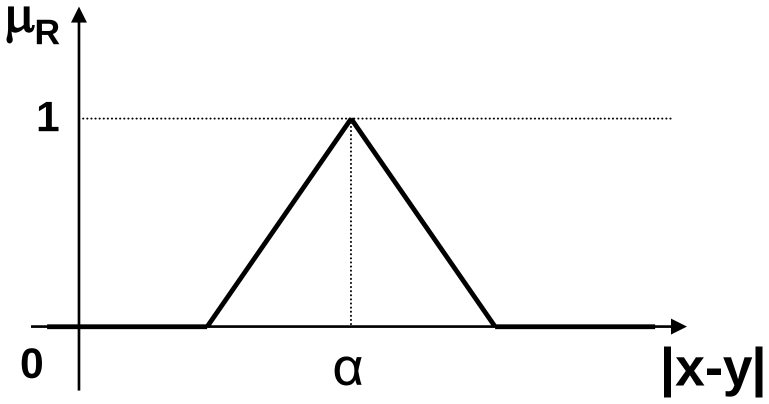
Дополнение нечёткого отношения:

$$\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y)$$

<u>Пример</u>

x**R**y – «модуль разности |x-y| близок к α»,

x$\overline{\mathbf{R}}$y – «модуль разности |x-y| не близок к α».



Комбинация нечётких отношений

Пусть X,Y,Z – множества, R – нечёткое отношение на $X \times Y$, S - нечёткое отношение на $Y \times Z$.

Комбинацией (типа sup-T) нечётких отношений R и S называют нечёткое отношение R°S на $X \times Z$ с функцией принадлежности

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \sup_{y \in Y}\{[\mu_R(x, y) \circ^T \mu_S(y, z)]\}$$

Комбинация нечётких отношений

Т-норма минимум (T(a,b)=min{a,b}):

$$\mu_{R\circ S}(x,z)=\sup_{y\in Y}\{\min\{\mu_R(x,y),\mu_S(y,z)\}\}$$

Если множество Y конечно, то:

$$\mu_{R\circ S}(x,z)=\max_{y\in Y}\{\min\{\mu_R(x,y),\mu_S(y,z)\}\}$$

Т-норма произведение (T(a,b)=a*b):

$$\mu_{R\circ S}(x,z)=\sup_{y\in Y}\{\mu_R(x,y)\cdot\mu_S(y,z)\}$$

Свойства нечётких отношений

$$R \circ I = I \circ R = R$$

$$R \circ 0 = 0 \circ R = 0$$

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

$$(R^m)^n = R^{mn}$$

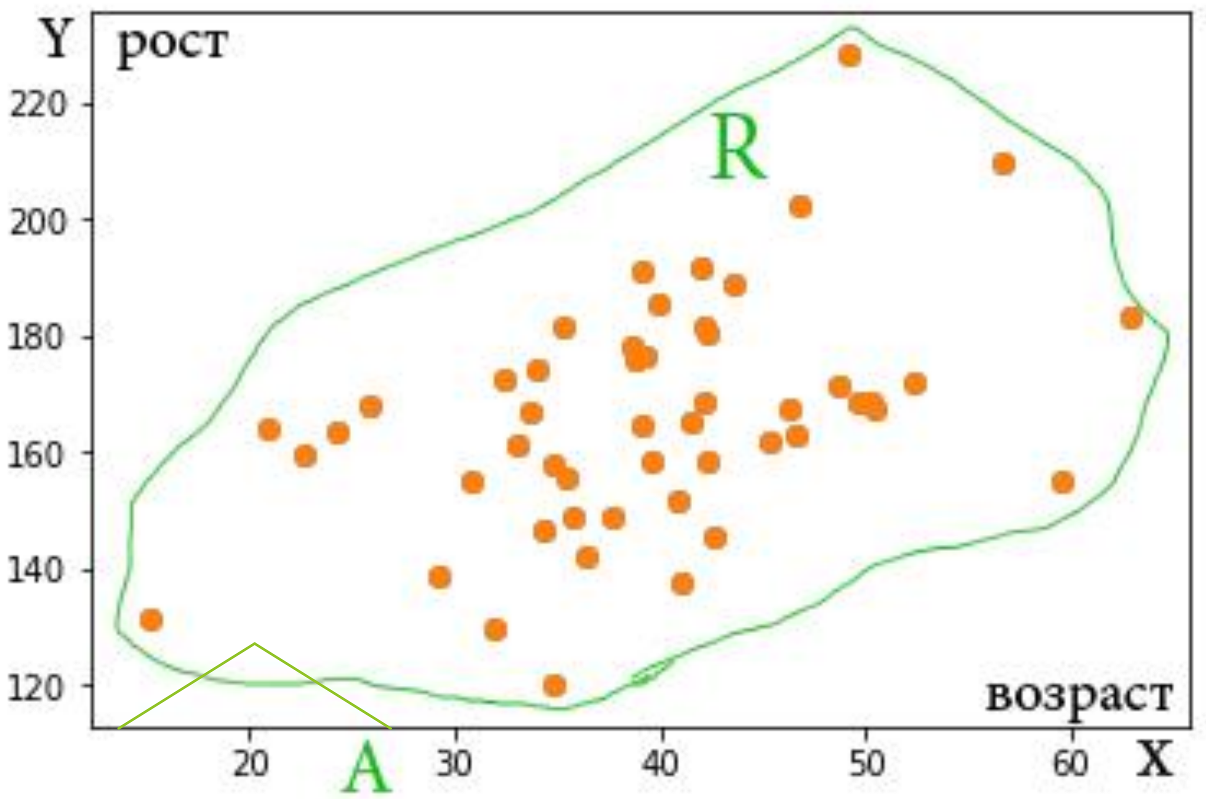
$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$

$$R \circ (S \cap T) = (R \circ S) \cap (R \circ T)$$

$$S \subset T \Rightarrow R \circ S \subset R \circ T$$

Образ нечёткого множества при нечётком отображении

Пусть X,Y – множества, R – нечёткое отношение на X×Y, A – нечёткое множество на X.



Образ нечёткого множества при нечётком отображении

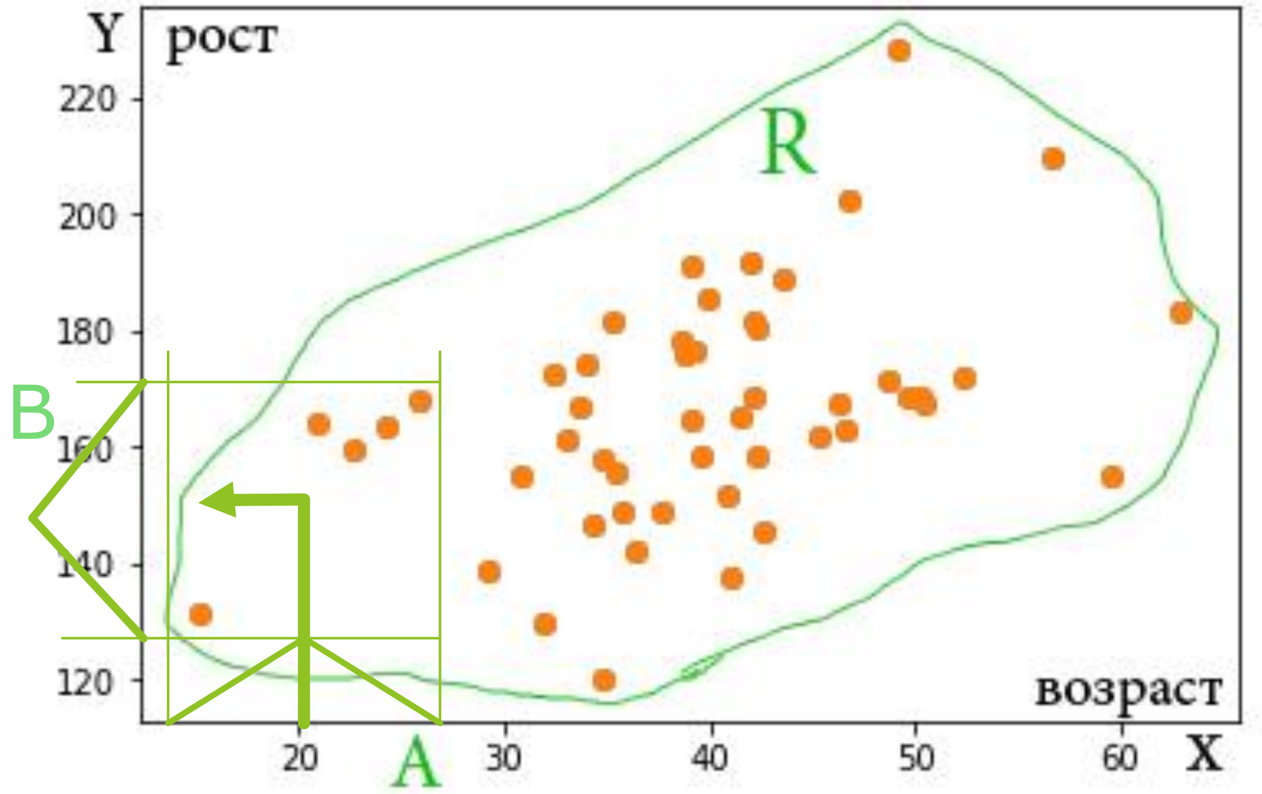
Пусть X,Y – множества, R – нечёткое отношение на $X \times Y$, A – нечёткое множество на X.

Образом B нечёткого множества A в Y при отношении R является нечёткое множество, являющееся комбинацией A°R с функцией принадлежности вида:

$$\mu_B(y) = \mu_R(A, y) = \pi(ARy) =$$
$$= \sup_{x \in X} \{[\mu_A(x) \circ^T \mu_R(x, y)]\}$$

Образ нечёткого множества при нечётком отображении

Образом B нечёткого множества A в Y при отношении R является нечёткое множество, являющееся комбинацией A°R..



Образ нечёткого множества при нечётком отображении

Т-норма минимум (T(a,b)=min{a,b}):

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X}\{\min\{\mu_A(x), \mu_R(x, y)\}\}$$

Если множество X конечно, то:

$$\mu_B(y) = \max_{x \in X}\{\min\{\mu_A(x), \mu_R(x, y)\}\}$$

Т-норма произведение (T(a,b)=a*b):

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X}\{\mu_A(x) \cdot \mu_R(x, y)\}$$

Если множество X конечно, то:

$$\mu_B(y) = \max_{x \in X}\{\mu_A(x) \cdot \mu_R(x, y)\}$$

Нечёткое отношение между элементом и нечётким множеством

Пусть X,Y – множества, R – нечёткое отношение на $X \times Y$, x_0- элемент из X, B – нечёткое множество на Y.

Тогда степень возможности, с которой x_0 связан с B нечётким отношением R равна:

$$\mu_R(x_0, B) = \pi(x_0 R B) =$$

$$= \sup_{y \in Y}\{[\mu_R(x_0, y) \circ^T \mu_B(y)]\}$$

Нечёткое отношение между элементом и нечётким множеством

Т-норма минимум (T(a,b)=min{a,b}):

$$\mu_R(x_0, B) = \sup_{y \in Y}\{\min\{\mu_R(x_0, y), \mu_B(y)\}\}$$

Если множество Y конечно, то:

$$\mu_R(x_0, B) = \max_{y \in Y}\{\min\{\mu_R(x_0, y), \mu_B(y)\}\}$$

Т-норма произведение (T(a,b)=a*b):

$$\mu_R(x_0, B) = \sup_{y \in Y}\{\mu_R(x_0, y) \cdot \mu_B(y)\}$$

Если множество Y конечно, то:

$$\mu_R(x_0, B) = \max_{y \in Y}\{\mu_R(x_0, y) \cdot \mu_B(y)\}$$

Нечёткое отношение между нечёткими множествами

Пусть X,Y – множества, R – нечёткое отношение на X×Y, A – нечёткое множество на X, B – нечёткое множество на Y.

Степень возможности того, что A и B связаны отношением R, определяется следующим образом:

$$\mu_R(A,B) = \pi(ARB) =$$

$$= \sup_{\substack{x\in X \\ y\in Y}}\{[\mu_R(x,y) \circ^T \mu_A(x) \circ^T \mu_B(y)]\}$$

Нечёткое отношение между нечёткими множествами

Т-норма минимум (T(a,b)=min{a,b}):

$$\mu_R(A,B)=\sup_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}\{\min\{\mu_R(x,y),\mu_A(x),\mu_B(x)\}\}$$

Т-норма произведение (T(a,b)=a*b):

$$\mu_R(A,B)=\sup_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}\{\mu_R(x,y)\cdot\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\}$$

Нечёткое отношение между нечёткими множествами

Пример:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} e^{x-y}, \ x-y \le 0 \\ e^{y-x}, \ x-y > 0 \end{cases}$$

$$\mu_A(x) = e^{-x^2}$$

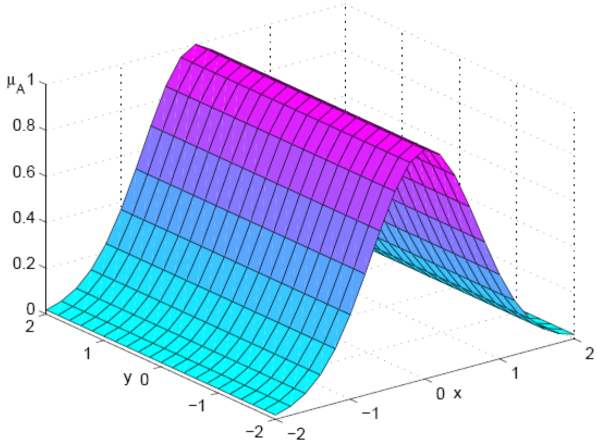
$$\mu_R(A,B) = ?$$

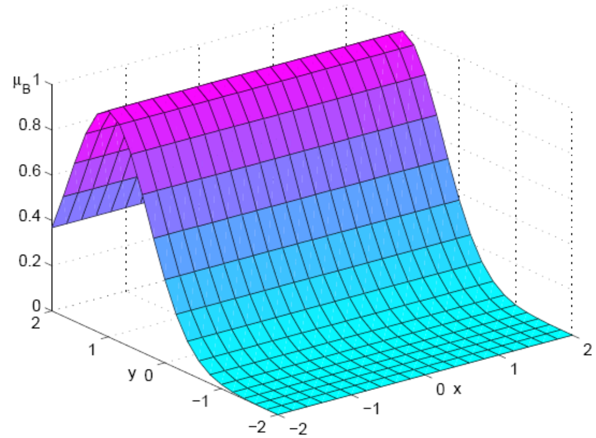
$$\mu_B(y) = e^{-(y-1)^2}$$

Нечёткое отношение между нечёткими множествами

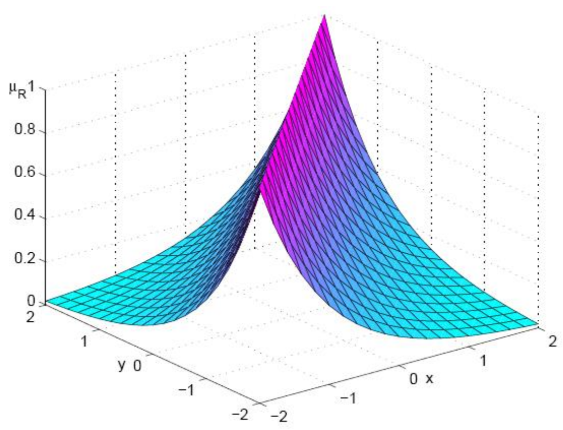
Пример:

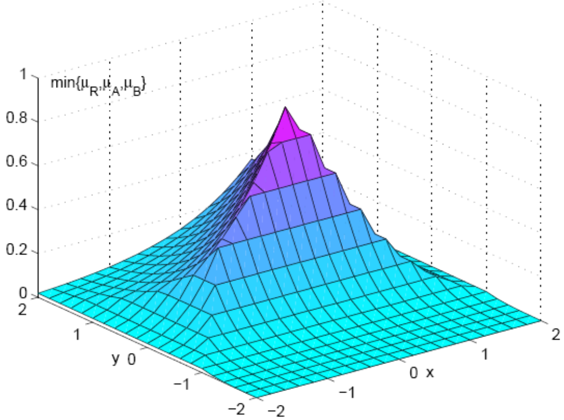
$$\mu_A(x) = e^{-x^2} \qquad \mu_B(y) = e^{-(y-1)^2}$$





$$\mu_R(x, y) = e^{-|x-y|} \qquad \min(\mu_R(x, y), \mu_A(y), \mu_B(y)\}$$





Задача 1

Пусть имеются следующие нечёткие отношения:

- $X \approx Y$: $\mu_{X \approx Y} = tr_{(x-y)}(0,2,2)$,
- $X \ll Y$: $\mu_{X \ll Y} = \max\{0, \min\{x - y, 1\}\}$,
- $X \ggg Y$: $\mu_{X \ggg Y} = \max\{0, \min\{y - x - 1{,}1\}\}$.

Вычислите графически функцию принадлежности отношений

$$R = (X \approx Y) \text{и} \left(\overline{X \ll Y}\right).$$

$$Q = (X \approx Y) \text{ или } \left(\overline{X \ggg Y}\right)$$

Здесь и далее – t-норма min, s-норма max.

Задача 2

Пусть $X = Z = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b\}$ и заданы два нечётких отношения:

$\boldsymbol{R_1(X, Y)}$	**1**	**2**	**3**
a	0.4	0.9	0.2
b	0.3	0.5	0.7

$\boldsymbol{R_2(Y, Z)}$	**a**	**b**
1	0.3	0.7
2	0.5	0.8
3	0.9	0.1

Найдите функцию принадлежности нечёткого отношения $R = R_1 \circ R_2$

t-норма: произведение.

Задача 3

Дано:

R_1, R_2 - нечёткие отношения на $X \times Y$,

A – нечёткое подмножество X.

R_1: $\mu_{R_1}(x, y) = tp_{x-y}(-2,0,1,1)$

R_2: $\mu_{R_2}(x, y) = tp_{x-y}(0,2,1,1)$

A: $\mu_A(x) = tr\ (5,1,1)$

Построить:

Функцию принадлежности образа B в Y нечёткого множества A при отношении $R = R_1 \cap R_2$ и t-норме min.